Aufsatz über die Beziehung des aegyptischen Dreiecks (3/4/5) zum goldenen Schnitt

CHEOPS UND CHEFREN

Jedem Schüler und Maurerlehrling ist es geläufig, das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenproportionen 3 / 4 / 5, welches noch heute zur Herstellung rechter Winkel in der Praxis verwendet wird. Es wird auch als ägyptisches Dreieck bezeichnet, ein Name, zu welchem diese Figur wohl nicht zufällig gekommen ist. Manches wird im Zusammenhang mit den alten Aegyptern als Zufall betrachtet und es macht manchmal den Anschein, dass die Erbauer der Pyramiden wahre Meister im Auffinden von Zufällen gewesen sein müssen. Ganz bestimmt kein Zufall ist die Verwendung des ägyptischen Dreiecks als Profildreieck der Pyramide des Chefren bei Gizeh, denn einer der grössten Skeptiker gegenüber den Rechenkünsten der Aegypter, der Berliner Aegyptologe L. Borchardt[i] gibt in einer Tabelle die Proportion den Rücksprung der Seitenschräge gegenüber der Senkrechten mit 5.25 : 7 (Handbreiten) an, was ein mathematisch exaktes Dreieck 3 / 4 / 5, ein ägyptisches also, ergibt. Man darf demnach behaupten, dass die Verwendung des ägyptischen Dreiecks als Profildreieck an der Chefrenpyramide wissenschaftlich untermauert ist.

Bei der geometrischen Grundlage der Pyramide des Cheops liegen die Verhältnisse etwas komplizierter, denn der wahrscheinliche Erbauer, der Wesir, Baumeister und Priester Hem On wählte ein Profildreieck, welches bis in die heutige Zeit zu unzähligen Kontroversen führte. J. Taylor[2] und P. Smyth[3] stellten unter anderem die Theorie auf, dass die Höhe der Pyramide dem Radius eines Kreises entspricht, welcher den gleichen Flächeninhalt aufweist, wie die quadratische Grundfläche der Pyramide. Allgemein wird dieser Zusammenhang als π -Theorie bezeichnet. J. Taylor erkannte aber auch, dass die Fläche eines der vier Manteldreiecke dem Quadrat der Höhe entsprechen könnte. Dies war genau das Postulat, welches man Herodot als von den Priestern zugeflüstertes Geheimnis zuschreibt. Berechnet man das zugehörige Profildreieck, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen kleine Kathete zur Hypothenuse im goldenen Schnitt steht. Weil J. Kepler sich intensiv mit diesem Dreieck befasste, wird es auch als Kepler-Dreieck bezeichnet.

W.F.Petrie, welcher die bis jetzt besten Messungen auf dem Plateau von Giseh vornahm, kam zum Resultat, dass die Erbauer ein Profildreieck mit den ganzzahligen Ellenmassen 220/280/356 verwendet haben. Untersucht man dieses Dreieck, so wird man feststellen, dass es zwar nicht ganz rechtwinklig ist, dass es aber, was seine Winkel betrifft, zwischen den beiden Profildreiecken der ersten Theorien liegt, obwohl schon diese von Auge kaum zu unterscheiden sind. Die Theorie W.F.Petrie's gefiel L. Borchardt so gut, dass er sie in einer Tabelle[4] mit der Rückspungsformel 5.5 : 7 festschrieb. Die Wahl aber des Profildreiecks bezeichnete er als puren Zufall und wenn es doch keiner sein sollte, so sei es nur reine Bequemlichkeit des Architekten gewesen. Die erstaunliche Nähe zum π -Dreieck und die noch engere zum Kepler-Dreieck ist seitdem für die Wissenschaft kein Thema mehr.

Es ist zweifellos richtig, dass bis heute kein Dokument der Aegypter gefunden wurde, welches auf deren Kenntnis der Zahl π und des goldenen Schnittes hinweist, aber vergleichsweise wurde auch noch kein Hinweis darauf gefunden, wie denn die Erbauer der mächtigen Bauten die ungeheure Präzision der Steinbearbeitung und die Bewältigung der logistischen Probleme zustande brachten. Was die leidigen Zufallsargumente im Bezug auf die Aegypter betrifft, so sei hier E. Bindel zitiert: "Es ist auch ein Zufall, dass Erde, Sonne und Mond so distanziert sind, dass gerade noch Sonnen- und Mondfinsternisse möglich sind, aber wiederum ist es ein weiser Zufall, hinter dem wir göttliches Schöpferwirken ahnen können. Dass der Erbauer der Cheops-Pyramide gerade diese und keine andere Form wählte, war nur dadurch möglich, dass er sich mit diesem göttlichen Schöpferwirken durch einen Hochstand seines Bewusstseins zu vereinigen, dass er die Mathematik noch als ein Wirken der Götter entgegenzunehmen vermochte".

Auf der Suche nach dem goldenen Schnitt können oft die merkwürdigsten Entdeckungen gemacht werden. A. Beutelspacher[5] stellt fest, dass diese Proportion sehr überraschend und an unvermuteten Orten auftreten kann. Platon dürfte wohl der erste gewesen sein, welcher den goldenen Schnitt erahnte (erkannte?) und in seinem Timaios in schönster Prosa beschrieb. Eine exakte mathematische Formulierung gelang erst Euklid mit seiner berühmten Aufgabe Nr. 11 im 2. Buch der Elemente, wobei aber anzunehmen ist, dass Euklid aus älteren Quellen geschöpft hat.

Das Einfliessen des goldenen Schnittes in die Architektur, die bildende Kunst und die Naturwissenschaften führte schon seit dem Altertum zu jeder Menge von Kontroversen über die tatsächlich festgestellten Proportionen. Solche Auseinandersetzungen haben sich bis heute erhalten. Dies ist auch gut verständlich, denn während es sich beim goldenen Schnitt aus mathematischer Sicht um eine berechen- und konstruierbare Tatsache handelt, weichen die Erzeugnisse oder die Messungen der Menschen unweigerlich von den Idealwerten ab. Die Klärung aber, ob es sich bei solchen Abweichungen um materiell bedingte Ungenauigkeiten handelt, oder ob die Proportionen, sei es vom Menschen oder der Natur absichtlich leicht verändert wurden, fällt schwer. Am Beispiel des Profildreiecks der Cheopspyramide lässt sich diese Schwierigkeit bestens illustrieren, denn die Abweichungen, welche sich aus der Annahme der beiden erwähnten Theorien ergeben, würden sich z.B. an der Höhe des Bauwerks nur auf ein paar wenige Zentimeter beschränken.

P.v.Naredi[6] hat eine ganze Anzahl wichtiger mittelalterlicher Bauten auf ihre Proportionen untersucht und dabei unter anderem festgestellt, dass drei Theoriengruppen besonders ins Gewicht fallen.

1. Die Fibbonacci-Folge 2. Harmonikale Proportionen 3. Der goldene Schnitt

Die Fibonacci-Folge ist eine Zahlenfolge, welche von Leonardo von Pisa im 12. Jahrh.(genannt Fibonacci, der Sohn des Bonacci) als theoretische Vermehrungsfolge eines Kaninchenpaares berechnet worden sei.

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 ...

Die Reihe beginnt mit zwei Einsen und jedes weitere Glied ist die Summe der beiden vorangehenden, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Bei den einzelnen Gliedern der Reihe handelt es sich durchwegs um natürliche Zahlen, deren Wachstum sehr stark beschleunigt wird. Zwei benachbarte Glieder aber stehen niemals in der gleichen Proportion zueinander wie ein anderes Paar.

1 : 1 = 1
2 : 1 = 2
3 : 2 = 1.5
5 : 3 = 1.66666...
8 : 5 = 1.6
13 : 8 = 1.625
... ... = ...

Beim Betrachten dieser Proportionen fallen zunächst zwei Dinge auf:

1. Bei den Brüchen, zumindest am Anfang der Reihe handelt es sich um solche, welche in der Harmonik, insbesondere in der Musiklehre eine wesentliche Rolle spielen. Nimmt man nämlich die Brüche als Längen gleichgespannter Saiten an (z.B. am Monochord), so ergeben diese

1 / 1	=	Grundton	c
1 / 2	=	Oktave	c'
2 / 3	=	Quinte	g
3 / 5	=	kleine Sext	a
5 / 8	=	grosse Sext	as

2. Die Qotienten zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen schwanken zwischen 1 und 2 und nähern sich in einer Art Pendelbewegung der Zahl τ . τ aber ist der Quotient einer gegebenen Strecke und ihrem grösseren Abschnitt der Teilung im goldenen Schnitt. Die Quotienten benachbarter Fibonaccizahlen konvergieren gegen τ, resp. τ^{-1}.

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180339887...$$

Wenn auch die Hereinnahme der Harmonik in diesen Vergleich etwas fragwürdig erscheinen mag (mit den, in der Fibonacci-Folge vorkommenden Tonfolgen liesse sich nur eine frugale Melodie spielen), so ist doch auffallend, dass der Grundton 1/1 aus denselben zwei Einsen besteht, wie der Beginn der

Fibonacci-Folge. Der goldene Schnitt macht hier keine Ausnahme, denn auch die Zahl τ lässt sich in einem Kettenbruch aus lauter Einsen explizit darstellen.

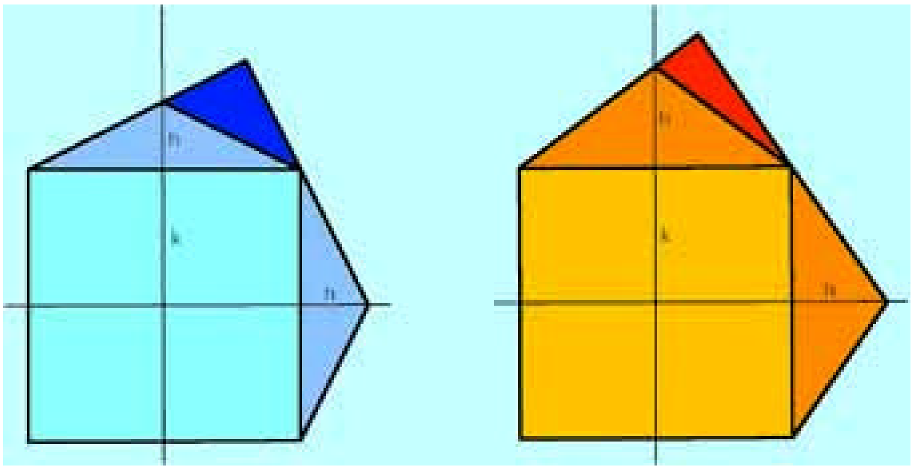
$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Die anfangs erwähnte Schwierigkeit, die von Menschen geschaffenen oder gemessenen Proportionen zu definieren wird durch die Gegenüberstellung von Fibonacci-Folge, Musikintervalle und goldenem Schnitt offensichtlich, denn eine festgestellte Proportion kann durch eine nur geringe Abweichung von einer Gruppe in die andere fallen. Die an vielen antiken und mittelalterlichen Bauwerken festgestellte Proportion 3 : 5 wird von den Harmonikern mit gewissem Recht als Interpretation der kleinen Sext (c-a) angesehen. Mit dem gleichen, wenn auch mathematisch nicht ganz haltbaren Recht betrachten die Anhänger des goldenen Schnittes[7] dieselbe Proportion als in der Baupraxis angewandte Vereinfachung der stetigen Teilung. An grossen Architekturobjekten allerdings kann sich die Abweichung von ca. 18/1000 beträchtlich auswirken. Bei einem Gemälde hingegen wäre die Entscheidung, ob harmonikale Proportion oder goldener Schnitt schon eher schwierig.

Die Fibonacci-Folge tritt in der Botanik häufig bei der Blattanordnung (Phyllotaxis) in Erscheinung. Schuppen der Tannzapfen, Kernhäuser der Sonnenblume und die Ananas sind z.B. nach Fibonacci-Zahlen angeordnet. H.S.M.Coxeter[7] bemerkt zur Phyllotaxis, dass sie kein allgemeines Gesetz darstelle, sondern vielmehr ein vorherrschendes, bezauberndes Bestreben. Mit diesem Ausdruck kann der Autor nur die Tendenz, einerseits ganzzahlige Proportionen anzuwenden und anderseits gegen den goldenen Schnitt zu konvergieren, gemeint haben. H.S.M.Coxeter ist unter den lebenden Mathematikern eher die Ausnahmeerscheinung, setzte er doch z.B. die von J. Kepler, Brückner, Schläfli, Weeler u.a. begonnene Katalogisierung der Sternpolieder fort und bescherte der heutigen Zeit mit seiner Abhandlung "the fifty-nine icosahedra" die wahrscheinlich schönste geometrische Arbeit der Gegenwart.

In der Kristallographie kann der goldene Schnitt nicht auftreten, da die Raumgitter der Kristalle aus Atomen, resp. Molekülen aufgebaut sind, deren Anzahl stets ganzzahlig sein muss. H. Reis[8] weist am Beispiel des Pyramidenwürfels auf die enge Verwandschaft des Kristallaufbaus mit der Musiklehre hin, indem er nachweist, dass jedem Pyramidenwürfel mit ganzzahligem Verhältnis seiner Würfelseite zur Pyramidenhöhe ein pythagoreisches Dreieck zugeschrieben werden kann (vgl. Figur 1).

Figur 1

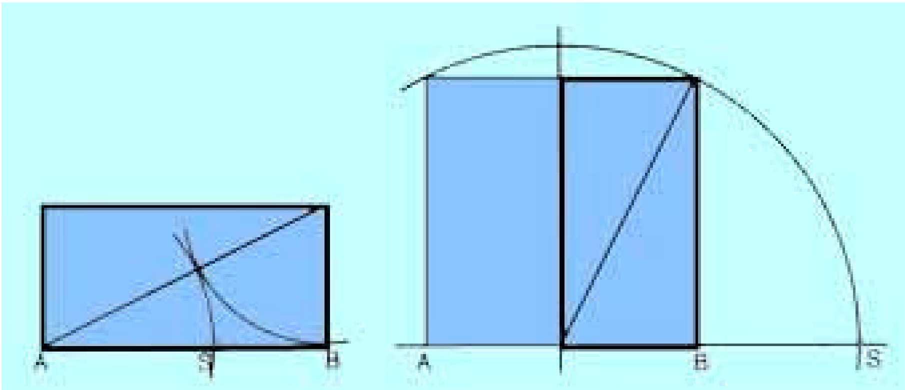


Dieser Zusammenhang ist verblüffend, denn auf diese Weise lassen sich alle existierenden pythagoreischen Dreiecke konstruieren und berechnen und ausserdem lässt sich so jedem Ton der Tonleiter das entsprechende Dreieck zuordnen. In der folgenden Tabelle sind eine Reihe von Pyramidenwürfeln aufgeführt, deren Proportion Seite zu Pyramidenhöhe jeweils Fibonaccizahlen-Paare bilden.

Pyramidenwürfel		pythagoreisches Dreieck	Annäherung an GS	Abweichung
210	2 : 1	3 / 4 / 5	2	0.38197...
320	3 : 2	5 / 12 / 13	1.5	0.11803...
530	5 : 3	8 / 15 / 17	1.666...	0.04863...
850	8 : 5	39 / 80 / 89	1.6	0.01803...
1380	13 : 8	105 / 208 / 233	1.61818...	0.00069...
-----	------	-----	-----	-----

An dieser Tabelle kann man erkennen, dass es mit der Annäherung an den goldenen Schnitt ebenso rasant aufwärts geht, wie mit dem Wachstum der Kaninchenfamile. Des Weiteren wird sichtbar, dass zwischen Harmonik und dem goldenen Schnitt keineswegs ein Abgrund besteht, wie von manchen Autoren gepredigt, sondern dass die beiden Begriffe durch die unendliche Reihe der Fibonacci-Zahlen völlig "harmonisch" verbunden sind. In der Spalte der pythagoreischen Dreiecke ist besonders beachtenswert, dass diese Dreiecke bei Zunahme der Fibonaccizahlen sich immer mehr einem diagonal geteilten halben Quadrat, dem von Platon als Elementardreieck Nr. 3 bezeichneten Dreieck, annähert. E. Bindel nennt das Rechteck, welches aus zwei dieser Dreiecke zusammengesetzt ist, das Doppelquadrat und stellt es in seinem Buch über die ägyptischen Pyramiden[9] auf den ihm gebührenden Platz. Wenn man den alten Aegyptern zutraut, dass sie die Proportionen ihres grössten Bauwerks, der Cheops-Pyramide bewusst so gewählt haben, und nicht, wie von kompetenter Seite immer wieder behauptet, einem verhängnisvollen Zufall zum Opfer gefallen sind, so dürfte das Doppelquadrat Ausgangspunkt der konstruktiven Ueberlegungen gewesen sein. Aus diesem speziellen Rechteck können die noch heute üblichen Risse des goldenen Schnittes vorgenommen werden; denjenigen der Teilung einer Strecke und denjenigen der Ergänzung einer Strecke im goldenen Schnitt (vgl Figur 2).

Figur 2



Das Auftreten der Proportion des goldenen Schnittes in grosser Annäherung beim Profildreieck der Cheops-Pyramide (220 / 280 / 356 Ellen), sowie das schlichtweg exakte Doppelquadrat als Grundriss der Königskammer könnten als einzelne Elemente nötigenfalls noch als Zufälle betrachtet werden. Die Vereinigung aber dieser beiden Elemente in demselben Bauwerk lässt eine Absicht erkennen, eine Absicht allerdings, welche sich auf eine völlig andere Einstellung gegenüber der Mathematik als die heutige von rationalen Denken beeinflusste, abstützt. Das Profildreieck der Cheops-Pyramide wurde in seiner Idealisierung als rechtwinkliges Dreieck, dessen kleine Kathete zur Hypothenuse im goldenen Schnitt steht, von J. Kepler untersucht und behandelt. Verwandelt man die Hypothenuse des Keplerdreiecks in eine Kathete, so erhält man logischerweise ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten zu einander im goldenen Schnitt stehen. Dieses wird nach dem griechischen Mathematiker und Zeitgenosse Platons, Eudoxos von Knidos als Eudoxosdreieck bezeichnet und es ist zugleich das halbe Manteldreieck der quadratischen Pyramide, deren Profildreick ein Keplerdreieck ist. Bei allen quadratischen Pyramiden kann man durch eine solche Metamorphose aus dem Profildreieck das zugehörige Manteldreieck und umgekehrt konstruieren.

Um den Vergleich von Fibonacci-Zahlenpaaren, harmonikalen Proportionen und dem goldenen Schnitt zu vertiefen, soll die nachstehende Tabelle dienen:

Fibonacci-Zahlen a b	rechtw.Dreieck Katheten a und b	rechtw.Dreieck kleine Kathete a Hypothenuse b	zugeordnetes pyth. Dreieck
1 2	1 / 2 / $\sqrt{5}$	1 / $\sqrt{3}$ / 2	3 / 5 / 4
2 3	2 / 3 / $\sqrt{13}$	2 / $\sqrt{5}$ / 3	5 / 12 / 13
3 5	3 / 5 / $\sqrt{34}$	3 / 4 / 5	8 / 15 / 17
5 8	5 / 8 / $\sqrt{89}$	5 / $\sqrt{39}$ / 8	39 / 80 / 89
-- –	-----------	----------	-----------
55 89	55 / 89 / $\sqrt{10946}$	55 / $\sqrt{4896}$ / 89	2448 / 4895 / 5473

Diese Tabelle liesse sich natürlich beliebig weiterführen, wobei die Zahlen dann eher unbequeme Dimensionen annehmen. Um es sich aber bequemer zu machen, betrachte man nur die erste und die theoretisch letzte Zeile, um zu folgendem Resultat zu kommen:

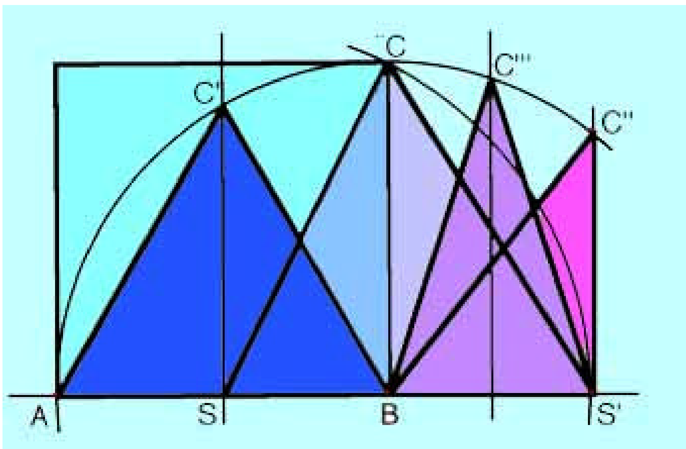
1	2	Elementardreieck Nr 3	Elementardreieck Nr 2	ägyptisches Dreieck
F_∞	$F_{\infty-1}$	Eudoxosdreieck	Keplerdreieck	Elementardreieck Nr 3

Als Platons Elementardreieck Nr. 2 wird das halbe gleichseitige Dreieck bezeichnet. Das gleichseitige Dreieck steht wie das diagonal halbierte Doppelquadrat in enger Beziehung mit dem goldenen Schnitt[10]. So schneiden z.B. die Ecken eines in einem Oktaeder eingeschriebenen Ikosaeders dessen Kanten im golden Schnitt.

Mit derselben Pendelbewegung, welche schon bei der Fibonacci-Folge beobachtet werden konnte, erreichen die Dreiecke der ersten Zeile in der Zeile der beiden grössten denkbaren Fibonacci-Zahlen die Dreiecke der letzen Zeile.

Um diese Dreiecksmetamorphosen geometrisch zu illustrieren greift man zu einer der Urfiguren der Menschheit um deren möglichst genaue Konstruktion sich alle Kulturen dieser Erde bemüht haben: dem Quadrat und seine Mittelparalellen (vgl. Figur 3).

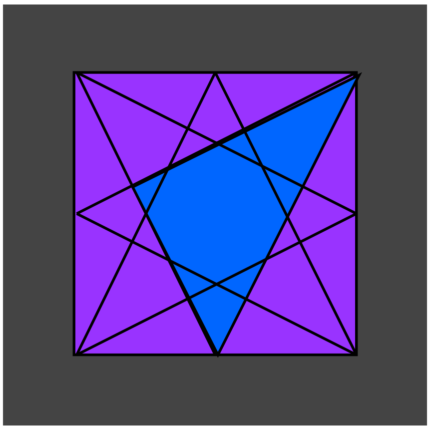
Figur 3



Aus diesem Quadrat wird nun die Ergänzung seiner Basis im goldenen Schnitt nach dem bekannten Verfahren vorgenommen, indem man SC in den Zirkel nimmt und auf die verlängerte Basis schlägt. Man errichtet nun in S' eine Senkrechte. Sticht man nun den Zirkel bei B ein und schlägt einen Kreis durch C, so erhält man alle nötigen Schnittpunkte, um die vier folgenden Dreiecke zu zeigen: SBC ist das Elementardreieck Nr. 3, BS'C ist das Eudoxos-Dreieck, SBC' ist das Elementardreieck Nr. 2 und BS'C'' ist das Keplerdreieck. Genau in der Mitte zwischen Eudoxos- und Keplerdreieck kann man das gleichschenklige Dreieck BS'C''' wahrnehmen und es ist nichts anderes, als eine Spitze des Pentagramms.

Was nun noch fehlt, ist die Metamorphose vom ägyptischen Dreieck zum Elementardreieck Nr. 3. Dazu wird wieder die Ursprungsfigur aus Figur 3, das Quadrat mit seinen beiden Mittelparalellen verwendet (vgl. Figur 4).

Figur 4



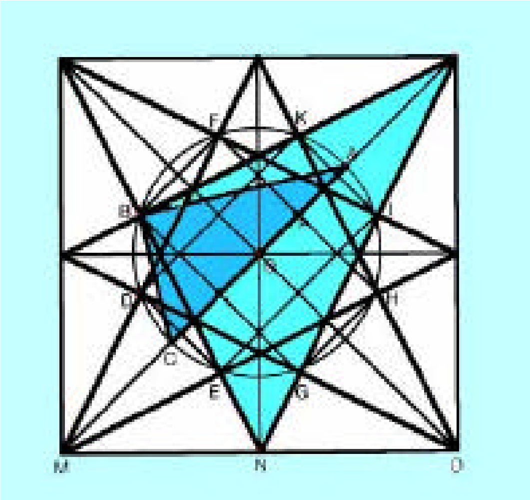
Verbindet man alle auf der Quadratperipherie sich ergebenden Punkte mit Geraden miteinander, so erhält man die sog. Knaut'sche Figur, welche im Mittelalter auch als Steinmetzzeichen, wie z.B. am Strassburger Münster verwendet wurde. Insgesamt sind in der Knaut'schen Figur 20 Elementardreiecke Nr. 3 und 12 ägyptische Dreiecke festzustellen. Zur Erklärung des Auftretens des ägyptischen Dreiecks in dieser Figur sei darauf hingewiesen, dass es sich im Prinzip um einen konvexen Pyramidenwürfel handelt, bei welchen die gleichen geometrischen Gesetzmässigkeiten gelten wie beim konkaven (vgl. A, Hoehn und H. Walser, „Gittergeometrie“,1999).

Es konnte nun nachgewiesen werden, dass das Elementardreieck Nr. 3 sowohl eine Beziehung zum goldenen Schnitt einerseits und zum ägyptischen Dreieck anderseits aufweist. Es fehlt einzig noch die direkte Beziehung des ägyptischen Dreiecks zum goldenen Schnitt.

Wiederum ist es die Knaut'sche Figur, welche als Brücke zur Sichtbarmachung einer solchen Beziehung dienen kann. An einer der schönsten gotischen Kathedralen, dem Strassburger Münster wurde diese Figur als Bemessungsgrundlage verwendet, eine Tatsache, welche wieder einmal darauf hinweist, dass die alten Baumeister ein besonders inniges Verhältnis zur Geometrie hatten und es ausserdem verstanden, aus einfachen geometrischen Konstruktionen heraus ihre Bauten zu konzipieren, ohne dass dadurch das freie Wesen der Kunst, der Genius auf das geringste beeinträchtigt worden wäre.

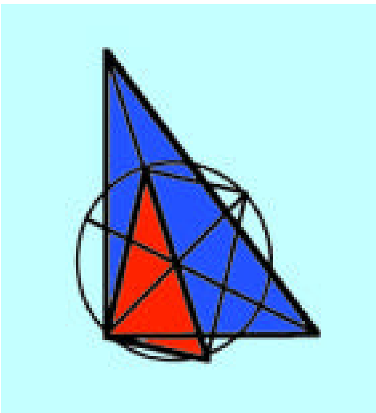
In Ergänzung der in Figur 4 gezeigten vier im Quadrat eingeschriebenen Knaut'schen Dreiecke gewinnt man durch ziehen der Quadratdiagonalen und den Schlag eines Kreises um den Mittelpunkt der Figur durch die äussersten Schnittpunkte der acht Zacken ein Dreieck ABC, welches ein Rechtwinkliges und zudem ein Eudoxos-Dreieck ist (vgl. Figur 5).

Figur 5



Betrachtet man Figur 5 etwas genauer, so erkennt man, dass die Ecken des Dreiecks einerseits auf den Winkelhalbierenden des ägyptischen Dreiecks und anderseits auf dem Kreis liegen. Da AB auf dem Kreisdurchmesser und C auf dem Kreis liegen, ist der Winkel bei C ein rechter (Thales). Es bleibt also zu beweisen, dass das Dreieck ABC ein Eudoxosdreieck ist. Doch zunächst sei hier die Konstruktion des Eudoxos-Dreiecks aus dem ägyptischen Dreieck gezeigt (vgl. Figur 6).

Figur 6



Selbst ein mathematisch nicht vorbelasteter Leser wird angesichts dieser Verschmelzung des Urrepräsentanten der Harmonik, dem ägyptischen Dreieck mit einer der wichtigsten Grundlagen des goldenen Schnittes, den Eudoxos-Dreieck nach einem Beweis verlangen. Zu diesem Zweck betrachten wir nochmals Figur 5:

Dass das blaue Dreieck ein ägyptisches ist, geht aus der Knauth'schen Figur hervor und braucht hier nicht speziell bewiesen zu werden. Nun muss nachgewiesen werden, dass die beiden Rechtecke BGHF und DEIK sogenannte Doppelquadrate sind. Dies geschieht mittels des Strahlensatzes indem man feststellt, dass MN = NO. Somit ist die Strecke FH doppelt soweit von M entfernt, als die Strecke

DE. Daraus ist bewiesen, dass FH = 2(DE), Aufgrund der Symmetrie der ganzen Figur sind die beiden Rechtecke kongruent und somit sind beide Doppelquadrate. Dass das rote Dreieck ein Eudoxosdreieck ist, ist daraus ersichtlich, dass die Ecke C nichts anderes ist, als die heruntergeschlagene Halbdiagonale der Quadrats BLPF, dasselbe wie in der Verlängerung der Strecke LP im Goldenen Schnitt (vgl. Figur 4). Da LP = BL, ist das Dreieck CLB ein Eudoxosdreieck und aufgrund der Aehnlichkeiteigenschaften das Dreieck ABC ebenfalls; w.z.b.w.

Diese eigenartige Beziehung des pythagoreischen Dreiecks 3/4/5 zum „goldenen Dreieck“, welche sich aus den Gesetzmässigkeiten der Knauth’schen Figur ergibt, lässt sich mit allen rechtwinkligen Dreiecken nachweisen und hängt mit den Entwicklungsformeln für pythagoreische Dreiecke $a = m^2 - n^2; b = 2mn; c = m^2 + n^2$ zusammen.

---

[1] Ludwig Borchardt, „Gegen die Zahlenmystik an der grossen Pyramide bei Gise“, Berlin, 1922.

[2] John Taylor, Journalist und Privatgelehrter aus London, stellte Mitte 19.Jahrh. die beiden Theorien auf.

3 Piazzi Smyth, schottischer Hofastronom, Mitte 19. Jahrh., Verfechter der π-Theorie.

[4] Ludwig Borchardt, 1922, S. 23

[5] A. Beutelspacher,“Der Goldene Schnitt“, Zürich, 1989

[6] Paul v. Naredi, „Architektur und Harmonie“, Köln, 1989

[7] Damit sind Leute gemeint, welche in fast alles den Goldenen Schnitt hineigeheimnissen, wie z.B. F.X. Pfeiffer, Friedrich Röber, Doczy, Zeising u.a

[8] Helmut Reis,“Natur und Harmonik“,Bonn, 1993

[9] Ernst Bindel, Die ägyptischen Pyramiden,,,,,Stuttgart, 1932

[10] vgl.Aufsatz „Der wiedergefundene Schatz“, Alfred Hoehn